

CONCEPÇÕES DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE PITÁGORAS E AS DEMONSTRAÇÕES DE SEU TEOREMA REFLETIDO NA APRENDIZAGEM DOS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Marconi Coelho dos SANTOS - Abigail Fregni LINS
marconicoelho@hotmail.com - bibilins2000@yahoo.co.uk
Universidade Estadual da Paraíba – Brasil

Tema: Pensamento Geométrico

Modalidade: Comunicação breve (CB)

Nível Educativo: Médio (11 a 17 anos)

Palavras Chaves: Educação Matemática; Pitágoras; Teorema; Demonstração.

Resumo:

Nesse trabalho apresentamos um estudo bibliográfico e resultados de duas pesquisas realizadas por meio de questionários sobre Pitágoras, seu Teorema e as várias maneiras de se demonstrá-lo. Um dos questionários foi aplicado a professores de Matemática do Ensino Fundamental das escolas públicas e particulares da cidade de Areia no Estado da Paraíba e outro a uma turma de alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual da mesma cidade. Discutimos inicialmente um breve histórico sobre a vida de Pitágoras e seu Teorema. Para isto foi utilizado referências de vários autores que escrevem sobre História da Matemática. Em seguida foram confrontados e analisados os dados de ambas as pesquisas. Os resultados mais relevantes demonstram que a metade dos professores conhece apenas a demonstração tradicional, encontrada nos livros didáticos a qual é baseada na semelhança de triângulo. Com relação aos alunos a pesquisa mostra que estes conhecem pouco, ou quase nada, sobre Pitágoras, seu Teorema e demonstrações.

1. Introdução

Qual ênfase é dada às demonstrações de teoremas no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio? Será que os professores estão preparados para trabalhar essas questões com seus alunos? Será que os professores se sentem seguros para desenvolver demonstrações em uma perspectiva para que seus alunos percebam com clareza e consigam entender o que significa uma demonstração de um fato matemático? Para Almoud (2007) estas e outras tantas questões ainda geram preocupações nos pesquisadores educadores matemáticos.

Se tratando de demonstrações vamos da ênfase ao Teorema de Pitágoras que é uma relação envolvendo os lados de um triângulo retângulo, conhecido mundialmente. Esta relação recebe o nome de Pitágoras porque se supõe que ele tenha construído a primeira prova deste teorema. Mas há indícios que mil anos antes de Pitágoras esta relação já era conhecida pelos babilônios. Os pitagóricos acreditavam que este teorema era uma revelação dos Deuses e com ele podia-se descobrir particularidades não reveladas da natureza (<http://tvescola.mec.gov.br>).

Vários estudiosos da Matemática consideram este teorema um dos mais importantes da História, como também um dos mais demonstrados em todo o mundo. Vários resultados importantes em Geometria Teórica, bem como na solução de problemas práticos relacionados a medidas foram descobertos através desse teorema, ou deles se utilizam. O fato é que o Teorema de Pitágoras é um dos mais famosos e úteis na Geometria Elementar e já foi demonstrado por várias civilizações no decorrer da História, tornando-se assim um excelente tema a ser aprofundado durante as aulas de Matemática no Ensino Fundamental (Gaspar, 2003).

Para uma melhor formalização, ou uma melhor fixação do Teorema de Pitágoras em um contexto geral, seria interessante que o professor de Matemática trabalhasse com os alunos algumas demonstrações desse teorema. De acordo com Barbosa (1993) é de grande importância que o professor de Matemática tenha conhecimento de algumas das demonstrações, para que ele possa utilizar aquelas que são compatíveis com nível de conhecimentos dos seus alunos e se possível fazer utilização das demonstrações que permitam a participação dos mesmos.

2. Uma breve explanação sobre a História de Pitágoras

Pitágoras foi um matemático grego que teve sua história envolta em lendas fantasiosas e mitos, uma vez que não existem relatos originais sobre sua vida. Pitágoras viveu em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso próximo de Mileto, onde aproximadamente 50 anos antes havia nascido Tales. Segundo Lima et al. (2006), foi a partir das ideias desses dois grandes nomes que a Matemática se iniciou como Ciência. Segundo Eves (2004), por volta de 572 a.C. Pitágoras fugiu para Metaponto, onde morreu, talvez assassinado, com idade avançada, entre setenta e cinco e oitenta anos. Já Barbosa (1993) cita que Pitágoras, se possivelmente existiu, foi exilado de Crotona e morreu em Tarento.

Alguns autores acreditam que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales devido a proximidade das regiões onde nasceram. Para Eves (2004), Pitágoras, 50 anos mais jovem que Tales, morava perto de Mileto, onde vivia Tales. Segundo Boyer (2010), Pitágoras era um místico, um profeta e algumas semelhanças em seus interesses devem ao fato de que Pitágoras também viajou pelo Egito e Babilônia. Pitágoras foi praticamente um contemporâneo de Buda, Confúcio e Lao-Tse. Alguns fatos podem relatar que Pitágoras foi discípulo de Tales, mas isto é improvável devido a diferença entre suas idades.

São várias as definições que os autores têm para Pitágoras. Para Boyer (2010), é difícil separar história e lenda no que se refere ao homem Pitágoras, pois ele era visto como um filósofo, astrônomo, matemático, abominador de feijões, santo, profeta, milagreiro, mágico e charlatão.

Segundo Russell (apud Strathern, 1998, p. 8), Pitágoras era intelectualmente, um dos homens mais importantes que já existiram, tanto quando era sábio, como quando não o era. A Matemática, como argumento dedutivo-demonstrativo, começa com ele e, nele, está ligada a uma forma peculiar de misticismo. Já Strathern (1998, p. 7) define Pitágoras como o primeiro matemático, o primeiro filósofo. Pitágoras também foi o primeiro a usar a palavra matemático. Ainda de acordo com Kahn (1993), Pitágoras não é apenas o nome mais famoso na História da Filosofia, anterior a Sócrates e Platão. Ele é também uma das figuras mais fascinantes e misteriosas da antiguidade. Pitágoras foi celebrado nas tradições antigas como matemático e filósofo da Matemática, com seu nome associado a um importante teorema da Geometria Plana.

3. Demonstrações do Teorema de Pitágoras

Na Matemática para verificar a veracidade de uma proposição se faz necessário uma prova que seja válida para todos os casos. Essa é uma particularidade da Matemática. Sendo assim, para que a proposição referente ao teorema de Pitágoras seja válida, se faz necessário que ela seja verdadeira para qualquer triângulo retângulo. Só assim teremos um teorema.

De acordo com Morais Filho (2010), o Teorema de Pitágoras é o mais conhecido do público em geral como também é o Teorema com o maior número de demonstrações existente em toda Matemática, por esse motivo está presente no Guinness (Livro dos Recordes) como o teorema mais demonstrado.

Vários foram os personagens que demonstram o Teorema de Pitágoras. São demonstrações desenvolvidas por mentes matemáticas brilhantes, tais como Pappus, Euclides e Pólya; e também de matemáticos amadores, como o ex-presidente americano J. A. Garfield ou do entusiasta pelas Ciências H. Perigal (algumas destas demonstrações encontram-se em Anexo 2).

4. Breve Pesquisa

Confeccionamos dois questionários (Bogdan e Biklen, 1994). O primeiro foi aplicado a oito professores do Ensino Fundamental de escolas públicas e particulares na cidade de Areia, Paraíba, com objetivo diagnosticar o nível de conhecimentos deles sobre o Teorema de Pitágoras. Apresentamos algumas das respostas dos professores de forma literal e outras representadas por gráficos mostrando a incidência das respostas às perguntas específicas do Questionário. O segundo questionário foi aplicado a vinte e seis alunos de uma turma de 1º de ano do Ensino Médio de uma Escola Pública com o objetivo de analisar o nível de conhecimentos dos alunos em relação a um tema abordado no ano escolar anterior, no caso, o Teorema de Pitágoras (os Questionários encontram-se em Anexo 1).

5. Resultados

Quando questionados sobre a abordagem em relação ao Teorema de Pitágoras no Livro Didático, as respostas dos professores foram diversificadas:

Professor A: *Ela é feita de forma superficial com pouca ênfase à sua estruturação, ou seja, não se dá muita importância à sua demonstração, utilidade ou coisas do gênero.*

Professor B: *Através do Triângulo Retângulo.*

Professor C: *É feita com pesquisa, histórias, questionamentos e imagens do dia a dia.*

Essa diferenciação entre as respostas dos professores provavelmente ocorreu pela adoção de Livros Didáticos distintos. De acordo com a Figura 1 a maioria dos professores pesquisados afirma que o Livro adotado traz aspectos históricos e questões contextualizadas sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras:

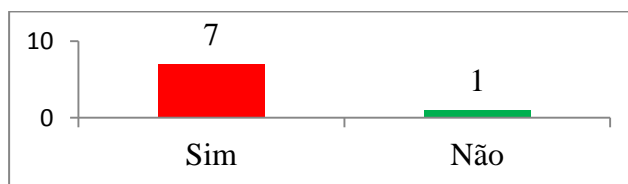


Figura 1: Quantidade de professores que afirmam que o livro adotado traz aspectos históricos e questões contextualizadas sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras

Fonte: autoria própria

Com relação à presença de demonstrações do Teorema de Pitágoras no Livro Didático utilizado, apenas um professor relata a falta destas demonstrações. Os demais confirmam a existência de alguma demonstração deste Teorema:

Professor E: *Apenas aquela tradicional que já vem com o triângulo retângulo...*

Professor F: *Sim. Uma demonstração baseada no cálculo de áreas de figuras geométricas planas.*

Observa-se na Figura 2 que a metade dos professores conhece apenas uma demonstração do Teorema de Pitágoras, a tradicional que é baseada na semelhança de triângulos, comprovando assim a falta de conhecimento destes sobre este tema:

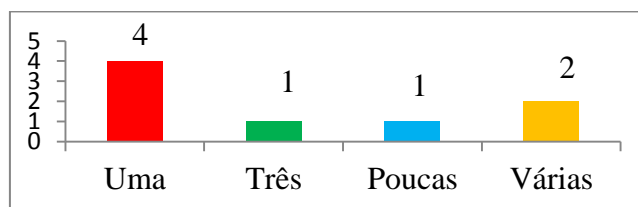


Figura 2: Quantidade de demonstrações do Teorema de Pitágoras que os professores conhecem
Fonte: autoria própria

Constatou-se, de acordo com a Figura 3, que mais da metade dos professores pesquisados usa apenas o quadro como recurso utilizado para trabalhar as demonstrações do Teorema de Pitágoras:

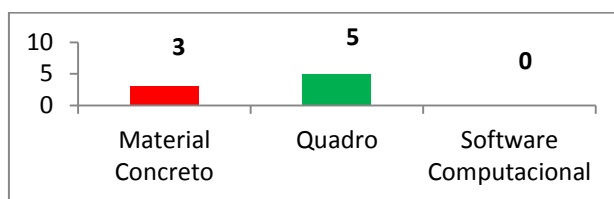


Figura 3: Recursos utilizados, pelos professores para trabalhar a(s) demonstrações do Teorema de Pitágoras com seus alunos
Fonte: autoria própria

Diante do exposto pode-se observar que mais da metade dos professores questionados relata que o livro didático adotado aborda o Teorema de Pitágoras, trazendo aspectos históricos, demonstração e contextualização sobre este Teorema. A metade dos professores conhece apenas uma das diversas demonstrações existentes sobre o Teorema de Pitágoras, a demonstração baseada em semelhanças de triângulos. Constatamos também o uso apenas do quadro como recurso utilizado para trabalhar a demonstração trazida pelo Livro e a incapacidade de alguns alunos enxergar diferentes aplicações sobre o Teorema de Pitágoras dentro e fora deste conteúdo, apesar dos professores afirmarem que abordam de forma contextualizada e interdisciplinar o Teorema de Pitágoras.

Discutimos a seguir algumas das respostas dos alunos.

Quando questionados sobre quem foi Pitágoras, dos 26 alunos do 1º ano do Ensino Médio, 14 deixaram esta questão em branco os outros 12 responderam de forma bem diversificada:

1. Escreva o que você conhece sobre Pitágoras.

5. Quais e quantas demonstrações do Teorema de Pitágoras você conhece?

1556

Além disto, a metade destes professores afirmou que alguns alunos são capazes de enxergar diferentes aplicações do Teorema de Pitágoras, dentro e fora do conteúdo matemático.

Ao serem questionados sobre a definição do Teorema de Pitágoras, apenas 1 dos alunos tentou responder a esta questão:

8. Defina, de acordo com seus conhecimentos, o Teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras são expressões matemáticas que utilizam figuras geométricas para representar suas fórmulas.

De acordo com o apresentado pelo aluno notou-se que este não tem conhecimento suficiente para uma definição que se aproxime da utilizada nos textos históricos e teóricos.

Quando pedido aos alunos para resolverem uma questão que utiliza o Teorema de Pitágoras, na sua resolução observou-se que dos 10 alunos que responderam a questão nenhum acertou. Uma das resoluções pode ser observada a seguir:

10. Na figura abaixo os lados do triângulo ABC estão expressos na mesma unidade. Sendo assim, determine o valor do lado correspondente a b.



De acordo com os resultados obtidos, notou-se que os alunos questionados não souberam relatar quem foi Pitágoras, não conheciam nenhuma das demonstrações do seu Teorema e nem aplicações deste Teorema, dentro e fora do conteúdo matemático. Assim como não foram capazes de definir este Teorema e resolver questões que o envolva.

6. Comentários Finais

Temos em mente que com a pesquisa bibliográfica que realizamos obtivemos um valioso conhecimento em relação à história de Pitágoras, seu Teorema e algumas de suas diversas demonstrações. Pudemos perceber, ao questionar alguns alunos do Ensino Médio de uma escola pública estadual, a falta de conhecimento sobre Pitágoras e as diversas demonstrações existentes sobre o seu Teorema.

Acreditamos que utilizando a História da Matemática, a história sobre Pitágoras e as diversas maneiras de demonstrar o seu Teorema, o tema/conteúdo pode vir a se tornar mais interessante e motivador para que os alunos melhorem seus conhecimentos em

relação ao tema/conteúdo presente no currículo de Matemática do Ensino Fundamental e necessário para o Ensino Médio.

Foram dois os estudos que realizamos sobre este tema, um envolvendo professores e outro, envolvendo alunos. Ambos os estudos nos deixou profundamente preocupados ao notarmos a falta de conhecimento sobre Pitágoras, seu Teorema e suas diversas demonstrações, tanto da parte de professores quanto da parte de alunos, consequência talvez da docência, ensino.

Com isso, sugerimos fortemente a professores, e alunos, buscarem na História da Matemática informações sobre o tema/conteúdo em questão e como trabalhá-lo em sala de aula. Esperamos, sinceramente, que nosso breve artigo possa vir a ser o primeiro passo!

Referências Bibliográficas

- Almouloud, S. (2007). *Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem*.
http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/prova.pdf
<http://www.ufrj.br/emanped/> Consultado 03/03/2013
- Barbosa, R. M. (1993). *Descobrendo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos*. São Paulo: Atual.
- Bogdan, R. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Boyer, C. B. (2010). *História da Matemática*. São Paulo: Blucher.
- Brasil. (2000). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio*. Brasília: MEC/SEMTEC.
- Cintra, C. de O. & Cintra, R. J. de S. (2003). *O teorema de Pitágoras*. Recife: O Autor.
- Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática*. Campinas: UNICAMP.
- Kahn, C. H. (1993). *Pitágoras e os pitagóricos: uma breve história*. São Paulo: Loyola.
- Lima, E. L. (2006). *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: SBM.
- Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P. & Wagner, A. (2006). *Temas e Problemas Elementares*. Rio de Janeiro: SBM.
- Morais Filho, D. C. (2010). *Um convite à matemática: fundamentos lógicos, com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades*. Campina Grande: Fábrica de Ensino.
- Santos, M. C.; Silva, F. L. T. & Lins, A. F. (2012). *Demonstrações do Teorema de Pitágoras na Perspectiva do Professor de Matemática*.
http://editorarealize.com.br/revistas/enect/trabalhos/Comunicacao_529.pdf
<http://www.editorarealize.com.br/revistas/> Consultado 07/05/2013
- Strathern, P. (1998). *Pitágoras e seu teorema em 90 minutos*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed.
- TV Escola O Canal da Educação (2013). *O legado de Pitágoras*.
http://tvescola.mec.gov.br/index.php?option=com_zoo&view=item&item_id=1916
<http://tvescola.mec.gov.br> Consultado 03/03/2013.

ANEXO 1

QUESTIONÁRIO
PERCEPÇÃO DOS PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE O
TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS DIVERSAS DEMONSTRAÇÕES.
Pesquisa coordenada por:
Prof. Dr^a: Profa. Abigail Fregni Lins (Bibi Lins)
Mestrando: Marconi Coelho dos Santos

1. No livro didático que você utiliza como é feita a abordagem em relação ao Teorema de Pitágoras?

2. O livro adotado traz aspectos históricos e questões contextualizadas sobre a aplicação deste Teorema?

3. Existe alguma demonstração do Teorema de Pitágoras no livro utilizado? Quais?

4. Quantas demonstrações do Teorema de Pitágoras você conhece?

5. Qual das demonstrações que você conhece é trabalhada com seus alunos?

6. Qual recurso você utiliza, para trabalhar a (s) demonstração(ões) do Teorema de Pitágoras com seus alunos?
a) Material concreto
b) Quadro
c) Software computacional
7. Ao utiliza o teorema de Pitágoras você busca contextualizar e/ou relacionar com outras disciplinas?

8. Em sua opinião seu aluno é capaz de enxergar diferentes aplicações do Teorema de Pitágoras dentro e fora do conteúdo da Matemática?

Figura 1: Questionário aplicado aos professores

Fonte: (própria)

QUESTIONÁRIO
PERCEPÇÃO DOS ALUNOS DO 1º ANO E 3º ANO DO ENSINO MÉDIO SOBRE O TRIÂNGULO RETÂNGULO,
O TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS DEMONSTRAÇÕES.

Pesquisa coordenada por:
Prof. Dr^a: Profa. Abigail Fregni Lins (Bibi Lins)
Mestrando: Marconi Coelho dos Santos

1. Escreva o que você conhece sobre Pitágoras.¶

3. Desenhe um triângulo retângulo explicitando o seus elementos.¶

4. Em um triângulo retângulo, como reconhecer o lado que é chamado de Hipotenusa?¶

5. Quais as razões trigonométricas existentes em um triângulo retângulo?¶

6. Quais e quantas demonstrações do Teorema de Pitágoras você conhece?¶

7. Se você conhece alguma demonstração do Teorema de Pitágoras, desenvolva-a.¶

8. Defina triângulo retângulo.¶

9. Defina de acordo com o seus conhecimentos o Teorema de Pitágoras.¶

10. Você conhece alguma aplicação do Teorema de Pitágoras?¶

10. Na figura abaixo os lados do triângulo ABC estão expressos na mesma unidade. Sendo assim, determine o valor do lado correspondente a x.¶



Figura 2: Questionário aplicado aos alunos

Fonte: (própria)

ANEXO 2

ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Demonstração 1: Prova Experimental

Cortando-se em uma folha de cartolina (ou papel – cartão) as seguintes figuras:

- 4 triângulos retângulos congruentes quaisquer (1)
- 1 quadrado de lado congruente a um dos catetos (2)
- 1 quadrado de lado congruente a outro cateto (3)
- 1 quadrado de lado congruente a hipotenusa (4)
- 2 quadrados de lado igual à soma dos catetos (5)

Como fase preliminar, verificamos por superposição com os alunos que os quatro triângulos são congruentes. Verificamos por justaposição (encostando) as medidas das figuras, observando quais são iguais.

Como experimental, o provamos em três fases:

Fase 1: Por superposição cubra, portanto sem deixar espaços vazios, um dos quadrados (5) com os quadrados (2) e (3) e os triângulos (1), sem que haja remonte ou sobra (Figura 2);

Fase 2: Por superposição cubra outro quadrado (5) com o quadrado (4) e os triângulos (1), sem remonte ou sobra (Figura 2); e,

Fase 3: Analisando as figuras, podemos chegar a seguinte conclusão:

(área do quadrado 2) + (área do quadrado 3) = (área do quadrado 4) ou o padrão pitagórico: (soma das áreas dos quadrados dos catetos) = (área do quadrado da hipotenusa) Barbosa (1993, p. 5).

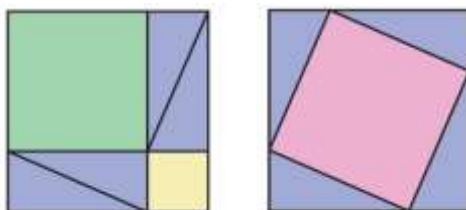
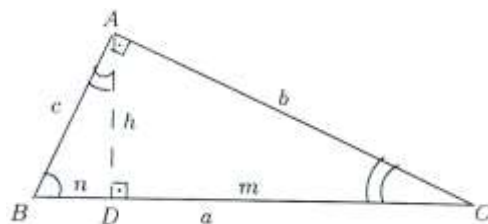


Figura 1: Prova experimental do Teorema de Pitágoras

Fonte: <http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2010/04/provas-do-teorema-de-pitagoras-parte-7.html>

Demonstração 2: Tradicional



$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \text{ e } \frac{b}{a} = \frac{m}{b}$$

Figura 2: Triângulo retângulo com as projeções dos catetos e a altura

Fonte: (Barbosa, 1993)

Demonstração 3: do Presidente

Analisando a Figura 4 temos um trapézio que foi decomposto em três triângulos retângulos de lados a, b e c, onde a área do trapézio com base a, b e altura a + b é igual à semisoma das bases vezes a altura. Por outro lado, a mesma área é também igual à soma das áreas de três triângulos retângulos. Portanto:

$$\frac{a+b}{2}x(a+b) = \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{b^2}{2} + bc + \frac{c^2}{2}$$

Mas podemos obter também a área pela soma das áreas dos triângulos:

$$T = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} = bc + \frac{a^2}{2}$$

Comparando-as e multiplicando por 2, temos: $a^2 = b^2 + c^2$:

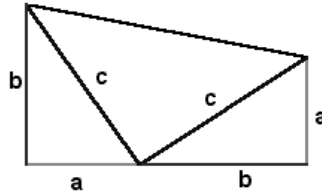


Figura 3: Figura utilizada na prova do presidente James Abram Garfield
Fonte: (Lima, 1998)

Demonstração 4: de Polya

Seja o tetraedro OABC tri-retângulo em O (Figura 5). Portanto, com as faces OAB, BOC e COA triângulos retângulos. Seja D a área da face triangular ABC: $D = \frac{h}{2}$ ou $4D^2 = a^2h^2$:

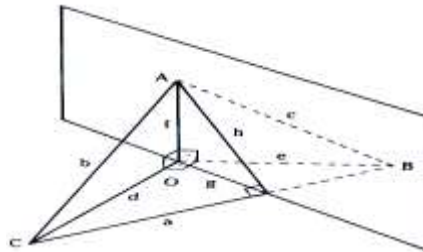


Figura 5: Figura que representa a demonstração de Polya
Fonte: (Barbosa, 1993)

Interceptamos o tetraedro com o plano contendo a altura e o vértice O. A interseção é um triângulo retângulo, sua hipotenusa mede h e os catetos f e g; então $h^2 = g^2 + f^2$. Portanto: $4D^2 = a^2g^2 + a^2f^2 = 4A^2 + a^2f^2$, onde A é a área da face BOC oposta ao vértice A do tetraedro. Mas $a^2 = d^2 + e^2$ no triângulo BOC; então temos:

$$4D^2 = 4A^2 + (d^2 + e^2)f^2 = 4A^2 + d^2f^2 + e^2f^2.$$

Porém $B = df/2$ e $C = ef/2$ são as áreas dos triângulos COA e AOB respectivamente opostos aos vértices B e C. Segue que $4D^2 = 4A^2 + 4B^2 + 4C^2$ ou $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$ (BARBOSA, 1993, p. 42).

Demonstração 4: de Leonardo Da Vinci

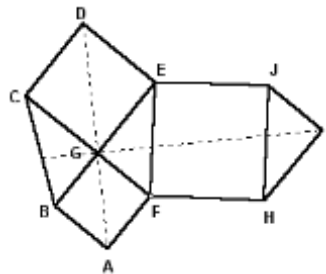


Figura 6: Demonstração de Leonardo Da Vinci
Fonte: (Lima, 1998)

Os quadriláteros ABCD, DEFA, GFHI e GEJI são congruentes. Logo, os hexágonos ABCDEF e GEJIHF têm a mesma área. Daí resulta que a área do quadrado FEJH é a soma das áreas dos quadrados ABGF e CDEG (LIMA, 1998, p. 55).